Δευτέρα 4/03/2019

Άσκηση: Η $\mathbb{Q}$ δεν είναι κυκλική ομάδα.

Απόδ: Έστω $\mathbb{Q}$ κυκλική $\Rightarrow \mathbb{Q} = \langle \frac{k}{\lambda} \rangle$, $k, \lambda \in \mathbb{Z}$

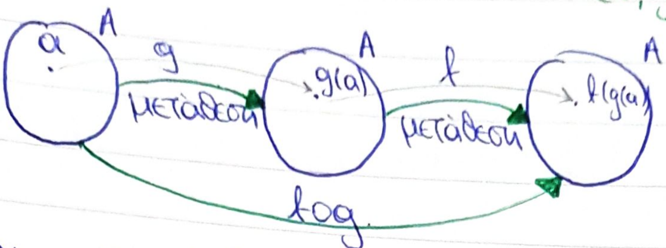
Τότε το $\frac{1}{2\lambda} \in \mathbb{Q} = \langle \frac{k}{\lambda} \rangle \Rightarrow \frac{1}{2\lambda} = \frac{nk}{\lambda} \Rightarrow \frac{1}{2} = nk \in \mathbb{Z}$ Άτοπο.

Άρα η $\mathbb{Q}$ δεν είναι κυκλική.

Ορισμός: Μετάθεση είναι μια απεικόνιση από το A στο A που είναι 1-1 και επί.

Ορισμός: Με S_A συμβολίζουμε το σύνολο όλων των μεταθέσεων από το A στο A.

$$S_A \times S_A \longrightarrow S_A$$
$$(f,g) \longrightarrow f\circ g$$



$f\circ g(a) = f(g(a))$.
$f\circ g : A \to A$.

Είναι η σύνθεση μετάθεση;

→ f,g μεταθέσεις $\Rightarrow$ f,g 1-1 και επί.

- $f\circ g(a) = f\circ g(b) \Rightarrow f(g(a)) = f(g(b)) \xRightarrow[1-1]{f} g(a) = g(b) \xRightarrow[1-1]{g} a = b$. Άρα "1-1".
- Έστω $y \in A$ f επί $\Rightarrow$ υπάρχει $b \in A$ τ.ω $f(b) = y$
  $b \in A$, g επί $\Rightarrow$ υπάρχει $a \in A$ τ.ω $g(a) = b$. $\Big\} \Rightarrow f\circ g(a) = f(g(a)) = f(b) = y$.

Άρα $f\circ g$ επί.

Συνεπώς $f\circ g$ μετάθεση του A.

$(S_A, \circ)$

Το σύνολο όλων των μεταθέσεων του A

πολλαπλασιασμός

σύνθεση απεικονίσεων

είναι διμελής πράξη

$$\left(\begin{array}{l} S_A \times S_A \to S_A \\ (f,g) \to f\circ g \text{ μετάθεση} \end{array}\right)$$

i) Έστω f,g,h μεταθέσεις του A και έστω $a \in A$.

$$\left.\begin{array}{l} f\circ(g\circ h)(a) = f(g\circ h(a)) = f(g(h(a))) \\ (f\circ g)\circ h(a) = (f\circ g)(h(a)) = f(g(h(a))) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f\circ(g\circ h)(a) = (f\circ g)\circ h(a) \\ f\circ(g\circ h) = (f\circ g)\circ h \end{array}$$

Άρα "∘" είναι προσεταιριστική.

ii) Έστω $I : A \to A$, $I(a) = a$. Έστω f μετάθεση και $a \in A$.

$$\left.\begin{array}{l} f\circ I(a) = f(I(a)) = f(a) \\ I\circ f(a) = I(f(a)) = f(a) \end{array}\right\} \Rightarrow f\circ I = I\circ f = f$$

Άρα "I" ουδέτερο στοιχείο.

iii) Έστω $f: A \to A$ μετάθεση $\Rightarrow f$ "1-1" κ' επί

Η $f\circ f^{-1}$ είναι η ταυτοτική σύνθεση, δηλαδή, $f\circ f^{-1} = I$

$f^{-1}: A \to A$ με $f^{-1}(b)=a$ αν $f(a)=b$

f^{-1} : "1-1" κ' επί

α) $f^{-1}(b_1) = f^{-1}(b_2) \Rightarrow f(f^{-1}(b_1)) = f(f^{-1}(b_2)) \Rightarrow (f\circ f^{-1})(b_1) = (f\circ f^{-1})(b_2)$

$\Rightarrow I(b_1) = I(b_2) \Rightarrow b_1 = b_2$. Άρα f^{-1} "1-1"

b) Έστω $x \in A$ $f^{-1}(f(x)) = (f^{-1}\circ f)(x) = I(x) = x$. Άρα f^{-1} : επί.

Συνεπώς f^{-1} μετάθεση $\Rightarrow f^{-1} \in S_A$

$f\circ f^{-1} = I = f^{-1}\circ f$. Κάθε στοιχείο $f \in S_A$ έχει αντίστροφο

Άρα $(S_A, \circ)$ είναι ομάδα.

$(S_A, \circ)$ ομάδα μεταθέσεων

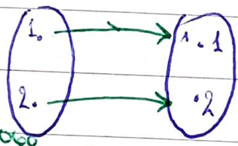
$A = \{1, 2, \dots, n\}$.

$S_A = S_n$ ← συμμετρική ομάδα.

$S_1 = \{I\}$ $\quad I(1) = 1$

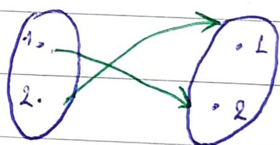
$S_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}}_{I}, \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} \right\}$

μια μετάθεση που έχει αντίστροφο τον εαυτό της



$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

ή



$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix} \right\}$

$|S_4| = 24 = 4!$

$S_n = \begin{pmatrix}1 & 2 & & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & & \sigma(n)\end{pmatrix}$

$\quad\;\; n \quad\; n-1 \qquad\quad 1 \quad = n!$ $\quad$ Άρα $|S_n| = n!$

S_7

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 3 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \sigma\circ\tau(1) = \sigma(7) = 2 & \sigma\circ\tau(2) = \sigma(4) = 4 & \sigma\circ\tau(3) = \sigma(3) = 1 & 5 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 7 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

S_7 ΔΕΝ είναι αβελιανή, $\sigma\circ\tau \neq \tau\circ\sigma$.
Για να είναι αβελιανή πρέπει $\sigma\circ\tau = \tau\circ\sigma$.

! Μόνο η S_1 κ' S_2 είναι αβελιανές

Έστω $\sigma \in S_A$

Έστω $a, b \in A$: $a \sim_\sigma b$ αν-ν υπάρχει $n \in \mathbb{Z}$ $b = \sigma^n(a)$

Είναι σχέση ισοδυναμίας όταν είναι ανακλαστική μεταβατική και συμμετρική.

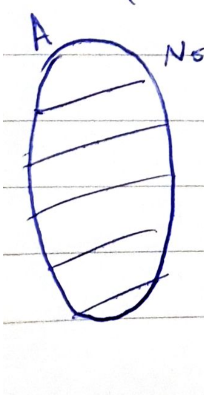
$\sigma^0 = I$
$\sigma^1 = \sigma$, σ^{-1}
$\sigma^2 = \sigma\circ\sigma$, $\sigma^{-2} = (\sigma^{-1})\circ(\sigma^{-1})$
$\sigma^3 = \sigma\circ\sigma\circ\sigma$
$\sigma^n = \underbrace{\sigma\circ\sigma\circ\sigma\circ\sigma \dots \circ\sigma}_{n\text{-φορές}}$
$\sigma^{-n} = \underbrace{(\sigma^{-1})\circ(\sigma^{-1})\circ \dots \circ(\sigma^{-1})}_{n\text{-φορές}}$

<u>Θεώρημα</u>: Η σχέση $\sim_\sigma$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

<u>Απόδ</u>: Έστω $a \in A$.

- $a = \sigma^0(a) \Rightarrow a \sim_\sigma a \Rightarrow$ ανακλαστική.
- Έστω $a \sim_\sigma b \Rightarrow b = \sigma^n(a) \Rightarrow a = \sigma^{-n}(b) \Rightarrow b \sim_\sigma a \Rightarrow \sim_\sigma$ συμμετρική.
- Έστω $\left.\begin{matrix} a \sim_\sigma b \Rightarrow b = \sigma^n(a) \\ b \sim_\sigma \gamma \Rightarrow \gamma = \sigma^m(b) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \gamma = \sigma^m(b) = \sigma^m(\sigma^n(a)) = \sigma^{m+n}(a) \Rightarrow a \sim_\sigma \gamma \Rightarrow \sim_\sigma$ μεταβατ.

Άρα η $\sim_\sigma$ είναι σχέση ισοδυναμίας



<u>Ορισμός</u>: Έστω σ μετάθεση του A. Οι κλάσεις ισοδυναμίας της $\sim_\sigma$ ονομάζονται τροχιές της σ.

Άσκηση:

Έστω $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 9 & 7 & 6 & 8 & 10 & 11 & 4 \end{pmatrix} \in S_{11}$

$[1]_{N_\sigma} = \{\alpha \in \{1,2,\dots,11\} \mid \alpha N_\sigma 1\} = \{\sigma^0(1), \sigma^1(1), \sigma^2(1), \sigma^3(1), \dots, \sigma^n(1), \sigma^{-1}(1), \sigma^{-2}(1), \dots\}$

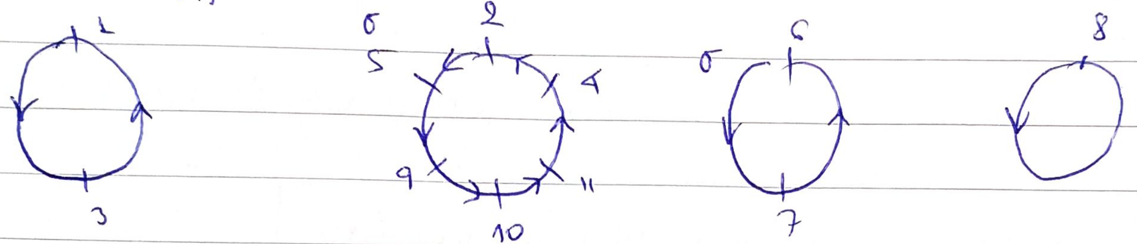
$= \{1,3\}$

$[2] = \{2,5,9,10,11,4\}$

$[6]_{N_\sigma} = \{6,7\}$

$[8]_{N_\sigma} = \{8\}$

$\boxed{\text{Η ένωση των τροχιών είναι όλο το σύνολο}}$



$\sigma = (1,3)(2,5,9,10,11,4)(6,7)(8)$

Άσκηση:

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 5 & 7 & 3 & 8 & 6 & 10 & 2 & 11 & 4 & 9 & 1 \end{pmatrix} =$

$\upsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 2 & 1 & 11 & 10 & 6 & 8 & 9 \end{pmatrix} =$

$\tau = (5,6,10,9,4,8,11,1)(2,7)(3)$

$\upsilon = (11,9,6,1,3,5,2,4,7)(8,10)$

$\boxed{\text{Μια μετάθεση μπορεί να γραφεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους}}$

$\tau \cdot \upsilon = (5,6,10,9,4,8,11,1)(2,7)(3) \cdot (11,9,6,1,3,5,2,4,7)(8,10).$
$= (1,3,6,5,7)(2,8,9,10,11,4)$

$\upsilon \cdot \tau = (11,9,6,1,3,5,2,4,7)(8,10) \cdot (5,6,10,9,4,8,11,1)(2,7)(3) =$
$= (1,2,11,3,5)(4,10,6,8,9,7)$

Κάνετε τις πράξεις: $\tau = (1,3,5)(2,7)(11,1,4)(5,6,2,8,9)(7,3)(4,5,2,1)$
$= (1,11,3,2,4,6,7,5,8,9)(10)$

Ορισμός: Μια μετάθεση λέγεται κύκλος αν έχει το πολύ μια τροχιά που περιέχει περισσότερα από ένα στοιχείο.

Παράδειγμα:

Η ταυτοτική έχει n τροχιές άρα είναι κύκλος αφού περιέχει ένα στοιχείο κάθε τροχιά. (κύκλος μήκους 1).

$\sigma \in S_{11}$ $\quad \sigma = (1,3,5,7,11,2,4)(6)(8)(9)(10)$ κύκλος μήκους 7.

$\tau = (1,5,11,10)(2)(3)(4)(6)(7)(8)(9)$ κύκλος μήκους 4

$\varphi = (1,3,5)(2,4,11,10)(6)(7)(8)(9)$ δεν είναι κύκλος

Πρόταση: Κάθε μετάθεση $\tau \in S_n$ γράφεται ως γινόμενο ξένων κύκλων.